6/4/20

Στο νέο σύστημα συντεταγμένων

Σημείωση: ① Στο νέο σύστημα συντ. δηλ. TNB τα διανύσματα προκύπτουν αποκλειστικά από τη καμπύλη r

$$\hat{T} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \Rightarrow \vec{v} = |\vec{v}|\,\hat{T} = \frac{ds}{dt}\cdot\hat{T}$$

② Τα διανύσματα αυτά αντιστοιχούν αποκλειστικά στη καμπύλη $\vec{r}$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\hat{T}\right) = \frac{d^2s}{dt^2}\hat{T} + \frac{ds}{dt}\frac{d\hat{T}}{dt} =$$

$$= \frac{d^2s}{dt^2}\hat{T} + \frac{ds}{dt}\frac{d\hat{T}}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}\hat{T} + k\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\hat{N}$$

άρα: $\boxed{a_T = \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{d}{dt}|\vec{v}|}$ είναι η επιτρόχιος επιτάχυνση

$\boxed{a_N = k\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = k|\vec{v}|^2}$ είναι η κεντρομόλος επιτάχυνση

Προφανώς $\boxed{|\vec{a}|^2 = a_T^2 + a_N^2 = \left|\frac{d\vec{v}}{dt}\right|^2}$

③ Τα διανύσματα αυτά σε αντίθεση με τα $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ δεν είναι σταθερά, δηλ. η παράγωγος δεν είναι 0

Παρατήρηση: Αφού $\vec{v} = \frac{ds}{dt}\cdot\hat{T}$, $\vec{a} = \frac{d^2s}{dt^2}\hat{T} + k\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\hat{N}$

$$\vec{v}\times\vec{a} = \left(\frac{ds}{dt}\cdot\frac{d^2s}{dt^2}\right)\hat{T}\times\hat{T} + \frac{ds}{dt}k\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\hat{T}\times\hat{N} =$$

$$= k\left(\frac{ds}{dt}\right)^3\hat{T}\times\hat{N} = k\left(\frac{ds}{dt}\right)^3\hat{B}$$ άρα:

Εξωτ. γινόμενο 1ης & και 2ης παραγώγου

$$|\vec{v}\times\vec{a}| = k\left(\frac{ds}{dt}\right)^3|\hat{B}| = k|\vec{v}|^3 \Rightarrow k = \frac{|\vec{v}\times\vec{a}|}{|\vec{v}|^3}$$: μέτρο εξωτ. γινόμενο της παραγώγου της τροχιάς επί τη 2η παράγωγο δια το μέτρο της ταχύτητας εις την 3η

και αντίστοιχα μπορούμε να δείξουμε ότι:

Άσκηση: Να κάνω το ίδιο για την στρέψη

$$\tau = \frac{\begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ \ddot{x} & \ddot{y} & \ddot{z} \\ \dddot{x} & \dddot{y} & \dddot{z} \end{vmatrix}}{|\vec{v} \times \vec{a}|^2} \qquad \vec{v} \times \vec{a} \neq \vec{0}$$

Συνολικά: Για το διάνυσμα θέσης $\vec{r}(t)$ (τροχιά) ορίζουμε:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}, \quad |\vec{v}| = \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| = \frac{ds}{dt}$$

: μέτρο της ταχύτητας και αλλαγή συντ/νων μεταξύ του s και του t

Δεν είναι μόνο μέτρο αλλά παριστάνει και αλλαγή μεταβλητής

$$\hat{T} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

: μοναδιαίο κι εφαπτόμενο διάνυσμα ταχύτητας,

$$\hat{N} = \frac{1}{|d\hat{T}/dt|} \frac{d\hat{T}}{dt} = \frac{1}{\kappa}\frac{d\hat{T}}{ds}$$

→ κάθετο

$$\boxed{\hat{B} = \hat{T} \times \hat{N}}$$

: μοναδιαίο

$$\kappa = \left|\frac{d\hat{T}}{ds}\right| = \frac{1}{|\vec{v}|}\left|\frac{d\hat{T}}{dt}\right| = \frac{|\vec{v} \times \vec{a}|}{|\vec{v}|^3}$$

: καμπυλότητα ορίζει νέο σύστημα συντ/νων και προέκυψε απ' τις ανάγκες της τροχιάς μας.

Στρέψη:

$$\tau = -\frac{d\hat{B}}{ds}\hat{N} = -\frac{1}{|\vec{v}|}\frac{d\hat{B}}{dt}\hat{N} = \frac{\begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ \ddot{x} & \ddot{y} & \ddot{z} \\ \dddot{x} & \dddot{y} & \dddot{z} \end{vmatrix}}{|\vec{v} \times \vec{a}|^2}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d}{dt}|\vec{v}|\hat{T} + \kappa|\vec{v}|^2\hat{N}$$

Προέκυψε η $\vec{a}$ και η ανάγκη να ορίσω 2 νέες ~~μεταβλητές~~ αντιστοιχίες την επιτρόχιο η οποία είναι παράλληλη προς την τροχιά και την κεντρομόλο που είναι πάνω στην τροχιά

Παράδειγμα: Κίνηση σε πολικές συντεταγμένες:

$\vec r(t) = r\cos t\,\hat i + r\sin t\,\hat j$ Η κεντρομόλος και η επιτρόχιος είναι εδώ πέρα εξ' ορισμού

Τότε:

$\vec v = -r\sin t\,\hat i + r\cos t\,\hat j \quad , |\vec v| = r$

$$\boxed{\hat T = \frac{\vec v}{|\vec v|} = -\sin t\,\hat i + \cos t\,\hat j} \ (*) \ , \ |\hat T| = 1$$

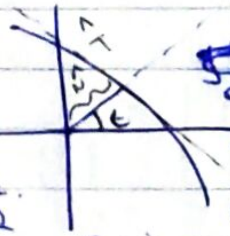
: μοναδιαίο ~~κα~~ διάνυσμα ∥ στην κίνηση

$(*)^2$ Το βλέπω ως 1 σύστημα 2×2 με αγνώστους τα $\hat i, \hat j$

$$\frac{d\hat T}{dt} = -\cos t\,\hat i - \sin t\,\hat j \quad , \left|\frac{d\hat T}{dt}\right| = 1$$

$\hat N = -\cos t\,\hat i - \sin t\,\hat j$: κοιτάει προς τα κάτω τα y και πίσω προς τα x διότι $\cos t, \sin t > 0$ οπότε $-\cos t, -\sin t < 0$

(*) Τοποθετώ το $\hat T$ στους άξονες. ~~...~~ Η φορά είναι τέτοια διότι το $\sin t > 0$ στο 1ο τεταρτ. ενώ το $\cos t < 0$ άρα το $\hat j$ κοιτάει προς τα πίσω.



Δηλαδή $\boxed{\begin{cases} \hat T = -\sin t\,\hat i + \cos t\,\hat j \\ \hat N = -\cos t\,\hat i - \sin t\,\hat j \end{cases}}$ $(*)^2$

• Τι θυμίζει το σχήμα? Έχω ένα διάνυσμα ακτινικό κι ένα διάνυσμα που ακολουθεί γωνίες του t. Αν αλλάξω συντεταγμένες και πάω σε πολικές ορίζω 2 νέα διανύσματα (r, θ) τα μοναδιαία των αντίστοιχων αξόνων

r: σε ποια ακτίνα βρίσκομαι

θ: πώς "σαρώνω" τις γωνίες

και $\boxed{\begin{cases} \hat i = -\sin t\,\hat T - \cos t\,\hat N \\ \hat j = \cos t\,\hat T - \sin t\,\hat N \end{cases}}$ •

Η 4η αυτή εξίσωση: Αντικαθιστώ τα $\hat i, \hat j$ μετρούμενα με τα $\hat T, \hat N$ (*)

Άρα: $\vec r(t) = r\cos t(-\sin t\,\hat T - \cos t\,\hat N) + r\sin t(\cos t\,\hat T - \sin t\,\hat N) =$
$= -r\hat N$

• Έχω ένα πίνακα που μου λέει πώς πάω στο ένα σύστημα στο άλλο, κι ο αντίστροφος του πώς πάω ~~απο~~ απ' το $\hat T$ στο $\hat j$.

Δηλαδή $\boxed{\begin{cases} \hat r = -\hat N \\ \hat \theta = \hat T \end{cases}}$

Στο νέο σύστημα συντεταγμένων απλοποιούνται τα πράγματα

Αντικαθιστώ τα $\hat i$ και $\hat j$ ↓

Επίσης, $\vec v = -r\sin t\,\hat i + r\cos t\,\hat j = -r\sin t(-\sin t\,\hat T - \cos t\,\hat N) +$
$+ r\cos t(\cos t\,\hat T - \sin t\,\hat N) = r\hat T = r\hat\theta$

Κινούμαι σε κύκλο!

$\vec a = -r\cos t\,\hat i - r\sin t\,\hat j = -r\cos t(-\sin t\,\hat T - \cos t\,\hat N) - r\sin t(\cos t\,\hat T - \sin t\,\hat N) =$
$= r\hat N = -r\hat r$ κεντρομόλος • Δεν έχω καθόλου επιτρόχιο. Σαρώνω τον κύκλο με v=σταθ.

Το μόνο που μού χρειάζεται για να ορίσω τον κύκλο μου είναι η ακτίνα του και μια $\vec a$ που κοιτάει προς το κέντρο του κύκλου

Προσχ. παραδ: Είχα τροχιά $\Rightarrow$ Βρήκα όλα τα άλλα.
Έχω δεδομένα $\Rightarrow$ Ψάχνω τροχιά

Εύρεση τροχιάς $\Rightarrow$ λύση διαφορικών εξισώσεων $\Downarrow$

Παράδειγμα Υλικό σημείο κινείται στο επίπεδο με σταθερά μέτρα ταχύτητας και επιτάχυνσης. Να βρεθεί η τροχιά του.

Λύση Παραμυθίζω και κάνω πράξεις:

Γνωρίζουμε ότι $\vec{r} = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j}$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} \quad \text{και} \quad |\vec{v}| = \sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{x}\hat{i} + \ddot{y}\hat{j} \quad \text{και} \quad |\vec{a}| = \sqrt{(\ddot{x})^2 + (\ddot{y})^2}$$

Σύστημα διαφορικών εξισώσεων
$\Downarrow$

$$\text{Όμως} \begin{cases} (\dot{x})^2 + (\dot{y})^2 = c_1 \\ (\ddot{x})^2 + (\ddot{y})^2 = c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} 2\dot{x}\ddot{x} + 2\dot{y}\ddot{y} = 0 \\ (\ddot{x})^2 + (\ddot{y})^2 = c_2 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x}\ddot{x} = -\dot{y}\ddot{y} \Rightarrow (\dot{x})^2(\ddot{x})^2 = (\dot{y})^2(\ddot{y})^2 \Rightarrow \\ (\ddot{x})^2 = \dfrac{(\dot{y})^2(\ddot{y})^2}{(\dot{x})^2} = \dfrac{(\dot{y})^2(\ddot{y})^2}{c_1 - (\dot{y})^2} \end{cases}$$

$$(\dot{y})^2(\ddot{y})^2 + (c_1 - (\dot{y})^2)\ddot{y}^2 = c_1c_2 - c_1(\dot{y})^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c_1(\ddot{y})^2 = c_1c_2 - c_2(\dot{y})^2$$ Παραμυθίζουμε ως Άσκηση $\Rightarrow$ προς και κάνω πράξεις

Αλλαγή συστήματος συντεταγμένων

Σε πολικές συντεταγμένες το διάνυσμα θέσης ενός υλικού σημείου δίνεται από:

$$\vec{r} = r\hat{r}$$

$$\text{όπου: } \begin{matrix} \hat{r} = \cos\theta\hat{i} + \sin\theta\hat{j} \\ \hat{\theta} = -\sin\theta\hat{i} + \cos\theta\hat{j} \end{matrix} \Bigg\} \quad \dot{\hat{r}} = (-\sin\theta\hat{i} + \cos\theta\hat{j})\dot{\theta} = \dot{\theta}\hat{\theta}$$

$$\dot{\hat{\theta}} = (-\sin\theta\hat{i} - \cos\theta\hat{j})\dot{\theta} = -\dot{\theta}\hat{r}$$

Δηλαδή: $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \dfrac{dr}{dt}\hat{r} + r\dot{\hat{r}} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}$

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{r}\hat{r} + \dot{r}\dot{\hat{r}} + \dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta} + r\ddot{\theta}\hat{\theta} + r\dot{\theta}\dot{\hat{\theta}} =$$
$$= \ddot{r}\hat{r} + \dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta} + \dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta} + r\ddot{\theta}\hat{\theta} - r\dot{\theta}^2\hat{r} =$$
$$= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{\theta}$$

κεντρομόλο επιτρόχιο